Am kleinsten, größten, schnellsten - Extreme in der Mathematik

Tag der Mathematik

Universität Bayreuth

Prof. Dr. Daniel Grieser

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

13. Juli 2013

Überblick

Extrema in der Natur

Extremalprobleme mathematisch lösen

Extrema als Hilfsmittel zum Lösen mathematischer Probleme

Extrema in der Natur

Da aber die Gestalt des ganzen Universums höchst vollkommen ist, entworfen vom weisesten Schöpfer, so geschieht in der Welt nichts, ohne dass sich irgendwie eine Maximums- oder Minimumsregel zeigt.

(Leonhard Euler, 18. Jh.)

Warum sind Seifenblasen rund?

(Bild einer Seifenblase)

Außen: Seifenhaut (elastisch) Innen: Luft (kann nicht raus)

Die Seifenblase macht die Oberfläche **kleinstmöglich**

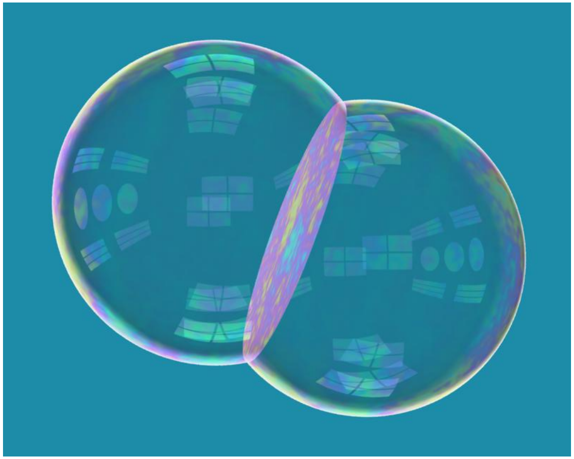
– bei vorgegebenem Volumen.

Solche Seifenblasen gibt es nicht

Seifenblasen

Die Kugel hat die kleinstmögliche Oberfläche bei vorgegebenem Volumen.
Was passiert, wenn sich zwei Seifenblasen treffen? Was passiert, wenn sich zwei Seifenblasen treffen?

(Bild einer Seifenblase)
Kugel



Zwei Kugelteile, die sich in 120°-Winkel treffen

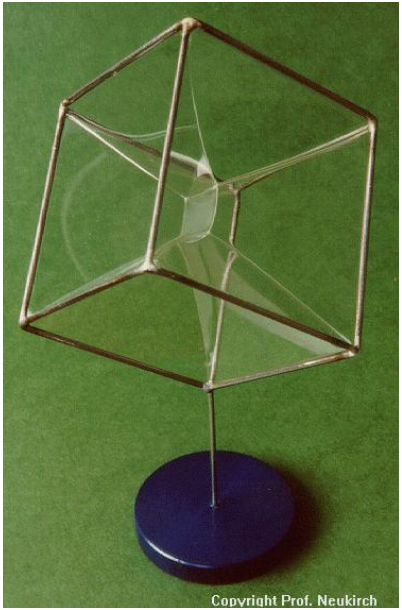
Kann man das mathematisch berechnen oder beweisen?

Isoperimetrisches Problem
gelöst im 19. Jh.

Dubble Bubble Theorem
gelöst 2002

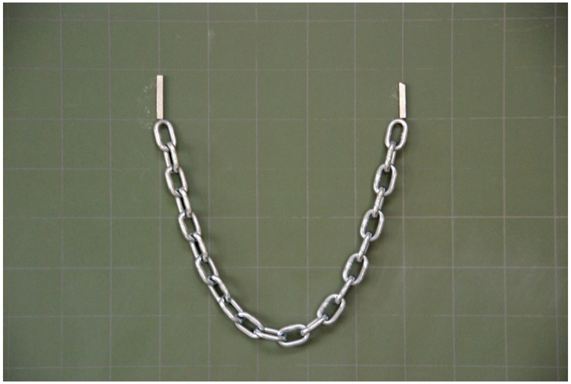
Seifenhäute

Seifenhäute machen die Fläche kleinstmöglich:



Plateau-Problem, gelöst 1930 (FIELDS-Medaille):
In jeden Draht lässt sich eine Minimalfläche einspannen

Andere Extrema



Der Schwerpunkt hängt so tief wie möglich. Welche Kurve ergibt sich?

Der Bogen soll stabil stehen. Was ist die beste Form?

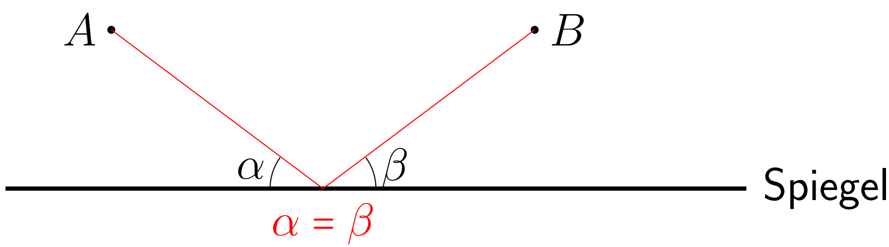
Antwort für beide: Die Kettenlinie. Formel: $y = e^x + e^{-x}$

Licht

Wie verlaufen Lichtstrahlen?

- Licht breitet sich *geradlinig* aus

- Bei Spiegelung gilt das *Reflektionsgesetz*



Beide Gesetze folgen aus einem Grundprinzip:

$$\boxed{\text{Das Licht nimmt den kürzesten Weg.}}^{1}$$

Warum? Stimmt das überhaupt für das Reflektionsgesetz?

[1] Genauer: Den Weg unter allen ähnlichen Wegen, für den es die kürzeste – oder die längste – Zeit braucht. Das ist wichtig für die Licht*brechung*.

Extremalprobleme mathematisch lösen

Isoperimetrisches Problem für Rechtecke

Welches Rechteck mit Umfang 20 cm hat die größte Fläche?

1. Lösung: Geschickt hinschreiben
2. Lösung: Ableiten

Das Spiegelproblem

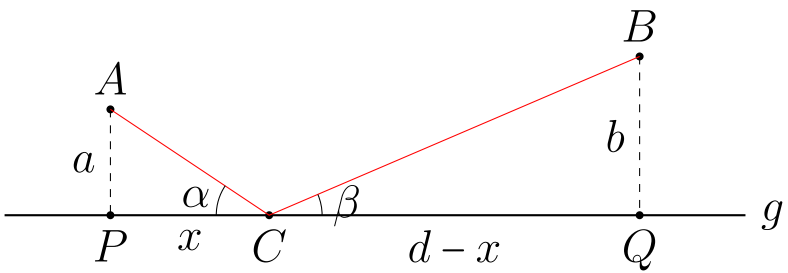
Warum ergibt das Reflektionsgesetz den kürzesten Lichtweg?

1. Lösung: Spiegelungstrick
2. Lösung: Ableiten

Vorteil der 1. Lösung: einfach

Vorteil der 2. Lösung: funktioniert auch für gebogene Spiegel

Analytische Lösung für den Spiegel



Länge des Lichtwegs: $\overline{AC} = \sqrt{a^2 + x^2}$, $\overline{BC} = \sqrt{b^2 + (d - x)^2}$ (Pythagoras), also

$$f(x) = \overline{AC} + \overline{BC} = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2}$$

Ableiten:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}} \\ &= \cos\alpha - \cos\beta \end{aligned}$$

Wähle x so, dass der Lichtweg $f(x)$ am kürzesten ist, dann $f'(x) = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \cos\beta \Rightarrow \alpha = \beta$.

Extremalprobleme mathematisch lösen

Isoperimetrisches Problem für Rechtecke

Welches Rechteck mit Umfang 20 cm hat die größte Fläche?

1. Lösung: Geschickt hinschreiben
2. Lösung: Ableiten

Das Spiegelproblem

Warum ergibt das Reflektionsgesetz den kürzesten Lichtweg?

1. Lösung: Spiegelungstrick
2. Lösung: Ableiten

Vorteil der 1. Lösung: einfach

Vorteil der 2. Lösung: funktioniert auch für gebogene Spiegel

Gebogene Spiegel

Das Gesetz der Spiegel

Jeder kürzeste oder längste Weg erfüllt das Reflektionsgesetz.

Bei einem flachen Spiegel gibt es nur einen kürzesten Weg.

Eine Beobachtung

Allgemeines Extremalprinzip

Extreme Objekte haben oft besondere Eigenschaften (z.B. Symmetrie).

Beispiele

- Rechteck mit größter Fläche bei gegebenem Umfang ist **Quadrat**.
- Körper mit kleinster Oberfläche bei gegebenem Volumen ist **Kugel**.
- Kürzester oder längster Lichtweg über einen Spiegel erfüllt das **Reflektionsgesetz** $\alpha = \beta$.

Wie man das Extremalprinzip ausnutzen kann

Extremalprinzip als Problemlösestrategie

Suchst du ein Objekt mit besonderen Eigenschaften, dann suche unter den Objekten, die in irgendeiner Weise extremal sind!

Das Billiard-Problem

Ein **Billiard-Dreieck** auf einem Billiardtisch ist eine dreieckige Bahn, die von einer Billiardkugel immer wieder durchlaufen wird.
Zeige:
Auf jedem streng konvexen Billiardtisch ohne Ecken gibt es ein Billiard-Dreieck.

Lösungsidee

Wähle das Dreieck auf dem Tisch, das den größten Umfang hat. Dies ist ein Billiard-Dreieck.

Zwei Probleme

Dreieckige Billiardtische

Zeige:

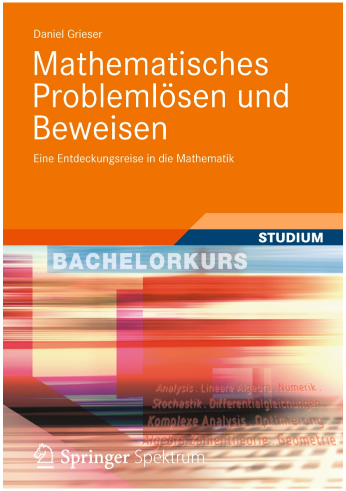
- Auf einem *spitzwinkligen* dreieckigen Billiardtisch bilden die Höhenfußpunkte ein Billiard-Dreieck. Dieses hat den kleinsten Umfang unter allen einbeschriebenen Dreiecken.
- Auf einem *stumpfwinkligen* dreieckigen Billiardtisch gibt es kein Billiarddreieck.
  Gibt es überhaupt eine geschlossene Billiardkugelbahn?
  Dieses Problem ist bis heute ungelöst!

Zusammenfassung

- Extrema bestimmen Vorgänge in der Natur (Seifenblasen, Kettenlinie, Lichtstrahlen usw.)
- Extrema kann man auf verschiedene Weisen berechnen
- Extreme Objekte sind oft besonders (z.B. symmetrisch)
- Dies kann man ausnutzen, um manche mathematische Probleme zu lösen (z.B. Existenz geschlossener Billiardkugelbahnen)

Literatur

DANIEL GRIESER, *Mathematisches Problemlösen und Beweisen – Eine Entdeckungsreise in die Mathematik*, Springer-Verlag, 2012.



STEFAN HILDEBRANDT UND ANTHONY TROMBA, *Kugel, Kreis und Seifenblasen. Optimale Formen in Geometrie und Natur* Birkhäuser, 1996.

PAUL NAHIN, *When least is best. How mathematicians discovered many clever ways to make things as small (or as large) as possible*, Princeton University Press, 2004.