Klassenstufen 11–12

Bitte jeweils in Teams von 3–5 Schülern bearbeiten.

Die Bewertung hängt neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründungen und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze werden belohnt.

Aufgabe 1 (9 Punkte):

Um sein Erbe nicht einem Kind allein anzuvertrauen, hatte der Großvater das Geheimnis zum Öffnen seines Safes geteilt: das Geheimnis S ergibt sich aus $S = p(0)$ eines Polynoms in $\mathbb{Z}_{11}$. Jedem seiner sieben Kinder wurde ein Teilgeheimnis der Form $(x_i, p(x_i))$ gegeben für $x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \subseteq \mathbb{Z}_{11}$. Am vorbestimmten Tage sind aber nur 3 seiner Kinder dem Ruf des Notars gefolgt und haben ihre Teilgeheimnisse mitgebracht:

- $(x_2, p(x_2)) = (2, 6)$
- $(x_4, p(x_4)) = (4, 3)$
- $(x_6, p(x_6)) = (6, 0)$

Vom Notar erfahren sie, dass ihre drei Teile gerade ausreichen, um das Geheimis zu berechnen. (Dies bedeutet, dass das Polynom entweder quadratisch, linear oder eine Zahl ist, also die Form $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ hat.) Wie lautet es?

Die Rechenregeln in $\mathbb{Z}_{11}$ lauten wie folgt:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

·	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9
3	0	3	6	9	1	4	7	10	2	5	8
4	0	4	8	1	5	9	2	6	10	3	7
5	0	5	10	4	9	3	8	2	7	1	6
6	0	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
7	0	7	3	10	6	2	9	5	1	8	4
8	0	8	5	2	10	7	4	1	9	6	3
9	0	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2
10	0	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Man kann sie sich in etwa vorstellen wie das Rechnen mit einer Uhr mit 11 Stunden.

Aufgabe 2 (12 Punkte):

Eine Boolsche Funktion f bildet die Teilmengen von $N = \{1, \ldots, n\}$ auf 0 oder 1 ab. Sie heißt monoton, wenn $f(S) \leq f(T)$ für alle $S \subseteq T \subseteq N$ und $f(\emptyset) = 0$ gilt. Gibt es nicht-negative Gewichte $w_1, \ldots, w_n$, so dass die Summe der Gewichte von Elementen in einer Menge S

(1) größergleich 1 ist, falls $f(S) = 1$;

(2) kleinergleich α ist, falls $f(S) = 0$,

so heißt f α-gewichtet.

Zeige folgende Behauptungen:

(a) Für $n \leq 3$ sind alle monotonen Boolschen Funktionen 1-gewichtet.

(b) Für $n = 6$ gibt es eine monotone Boolsche Funktion, die nicht 1-gewichtet ist.

(c) Für $n = 4$ sind alle monotonen Boolschen Funktionen $\frac{4}{3}$-gewichtet.

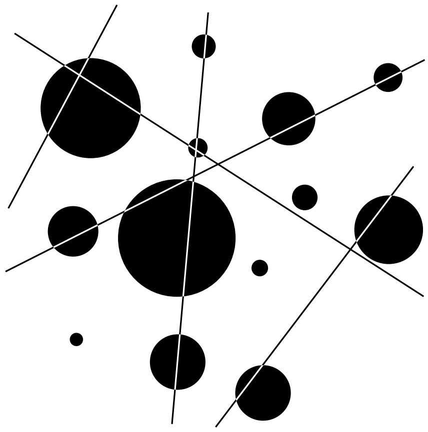
Aufgabe 3 (12 Punkte):

Eine Menge von disjunkten (in anderen Worten: überschneidungsfreien) offenen Kreisscheiben $K_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-u_i)^2 + (y-v_i)^2 < r_i^2\}$ nennen wir *tomographie-geeignet*, wenn die Schnittmenge mit jeder beliebigen Geraden eine Gesamtlänge kleiner als 1 hat.

(a) Bestimme den maximalen Flächeninhalt einer tomographie-geeigneten Kreisscheibe.

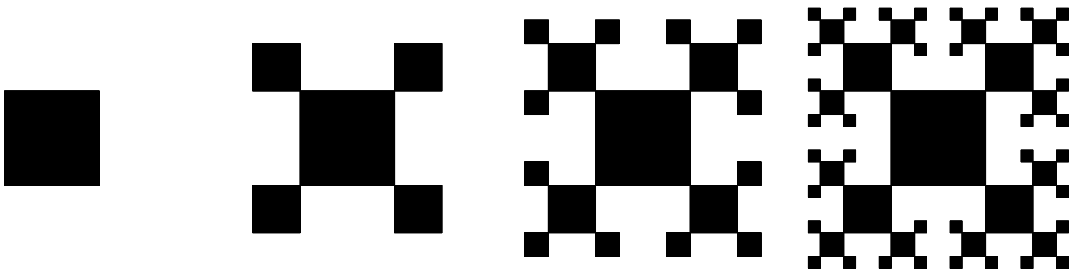
(b) Bestimme den maximalen Flächeninhalt zweier tomographie-geeigneter Kreisscheiben.

(c) Bestimme den maximalen Flächeninhalt von 2013 tomographie-geeigneten Kreisscheiben.



Aufgabe 4 (12 Punkte):

Betrachte folgende Konstruktion: Starte mit einem Quadrat mit Seitenlänge 1. Eine Ecke eines Quadrats, welches keine Ecke eines anderen Quadrats berührt, heißt *frei*. In jedem weiteren Konstruktionsschritt wird an die freien Ecken diagonal ein weiteres Quadrat der halben Seitenlänge angefügt. Die entstehenden Muster der ersten vier Konstruktionsschritte sehen wie folgt aus:



(a) Welchen Flächeninhalt besitzt das n-te Muster?

(b) Welches Verhalten zeigt die Folge der Flächeninhalte für $n \to \infty$?

(c) Welchen Umfang besitzt das n-te Muster?

(d) Welches Verhalten zeigt die Folge der Umfänge für $n \to \infty$?

(e) Welche Seitenlänge besitzt das kleinste Quadrat, welches das n-te Muster einschließt? Wie lautet der Grenzwert?

(f) Aus wie vielen Quadraten besteht das n-te Muster?

Folgende Formel für $x > 0$, $x \neq 1$ könnte nützlich sein:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$