Klassenstufen 9–10

Bitte jeweils in Teams von 3–5 Schülern bearbeiten.

Die Bewertung hängt neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründungen und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze werden belohnt.

Aufgabe 1 (7 Punkte):

Für ein rechteckiges Bild mit den ganzzahligen Seitenlängen a cm und b cm gelte $a > b$. Dieses Bild wird mit einem 1 cm breiten Rahmen umgeben. Ermittle alle Zahlenpaare $(a; b)$, für die der Flächeninhalt des Bildes gleich dem Flächeninhalt des Rahmens ist.

Aufgabe 2 (9 Punkte):

Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es, einen 99-Cent-Artikel mit 1-Cent, 2-Cent, 5-Cent oder 10-Cent Münzen zu bezahlen?

Aufgabe 3 (12 Punkte):

Wie Peter Zwegat es in der von RTL ausgestrahlten Reality-TV-Serie „Raus aus den Schulden" immer wieder schafft, mit nur wenig Geld Gläubiger[1] seiner Klienten zufrieden zu stellen, wird wohl immer ein Mysterium bleiben. Wie man aber im Falle eines Bankrotts das verbleibende Vermögen *gerecht* auf die Gläubiger verteilt, dafür gibt es eine anerkannte ökonomische Theorie, die sich anhand des Beispiels zweier Gläubiger erklären lässt.

Zwei-Personen Bankrottproblem
verteilbares Vermögen: E
Ansprüche: d_1, d_2 mit $d_1, d_2 \geq 0$ und $d_1 + d_2 > E$

Lösung
Verteile gemäß

$$x_i = \frac{E - v(1) - v(2)}{2} + v(i),$$

wobei $v(1) := \max(E - d_2, 0)$ und $v(2) := \max(E - d_1, 0)$. [2]
Interpretation: Gläubiger 1 kann argumentieren, dass Gläubiger 2 maximal d_2 haben will. Er hat also $v(1)$ *sicher*. Gläubiger 2 hat $v(2)$ sicher, der Rest wird gleichmäßig aufgeteilt.

Beispiele
Für $E = 100$, $d_1 = 100$, $d_2 = 50$ lautet die Aufteilung $x_1 = 75$, $x_2 = 25$.
Für $E = 100$, $d_1 = 150$, $d_2 = 120$ lautet die Aufteilung $x_1 = 50$, $x_2 = 50$.

Im allgemeinen Fall von n Gläubigern mit Anspüchen $d_1, \ldots, d_n$ sagt man, dass eine Aufteilung $x_1, \ldots, x_n$ eines Vermögens $E = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ *fair* ist, wenn für je zwei Gläubiger i und j die gemeinsam zugeteilte Summe $E^{(i,j)} = x_i + x_j$ bei Ansprüchen d_i und d_j gemäß der Zwei-Personen Lösung in x_1, x_2 aufgeteilt wird.

Für $E = 60$, $d_1 = 10$, $d_2 = 20$, $d_3 = 30$, $d_4 = 40$, $x_1 = 5$, $x_2 = 15$, $x_3 = 15$ und $x_4 = 25$ ist die Bedingung der *Fairness* beispielsweise für die Gläubigerpaare $1, 2$ und $3, 4$ erfüllt, für das Gläubigerpaar $2, 3$ dagegen nicht (hier hätte die Aufteilung $10, 20$ lauten müssen). Somit ist die beispielhafte Aufteilung nicht *fair*.

Kannst Du eine *faire* Aufteilung für drei Gläubiger mit den Parametern $E = 2000$, $d_1 = 1000$, $d_2 = 2000$ und $d_3 = 3000$ berechnen?

[1] Gläubiger sind, vereinfacht ausgedrückt, Leute denen Geld geschuldet wird.
[2] $\max(a, b)$ steht für das Maximum zweier Zahlen a und b. Also jeweils für die größere der beiden. Beispiel: $\max(4, 3) = \max(3, 4) = 4$.

Aufgabe 4 (9 Punkte):

In einer griechischen Quizshow erklärt der Showmaster der Kandidatin, dass sich hinter den sechs Toren 3 Ziegen, 2 Esel und ein Auto befinden. Die Kandidatin entscheidet sich für Tor Nr. 2. Um die Spannung zu erhöhen öffnet der Showmaster Tor 3, hinter dem sich eine Ziege befindet. Er bietet ihr an, die Wahl des von ihr gewünschten Tores noch einmal zu überdenken. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für einen Autogewinn, wenn

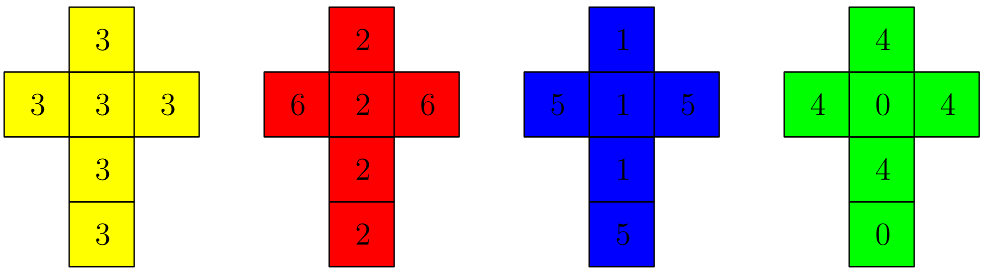
(a) die Kandidatin bei ihrer Wahl Tor 2 öffnen zu lassen bleibt;

(b) die Kandidatin ihre Wahl auf Tor 5 abändert;

(c) sich hinter Tor 3 ein Esel anstatt einer Ziege befindet und die Kandidatin ihre Wahl auf Tor 4 abändert?

Aufgabe 5 (8 Punkte):

Um den Mitschülern Hausaufgaben zu ersparen bringt der Klassensprecher 4 Würfel mit den folgenden Augenzahlen und Farben mit.



Er möchte mit dem Lehrer das folgende Spiel spielen. Der Lehrer darf zuerst einen Würfel auswählen. Danach wählt der Klassensprecher einen aus. Jeder wirft ein Mal. Hat der Klassensprecher die höhere Augenzahl geworfen, müssen die Schüler keine Hausaufgaben machen. Wirft der Lehrer die höhere Augenzahl, gibt es eine besonders lange Aufgabe für zu Hause.

(a) Angenommen, der Lehrer wählt den roten Würfel. Welchen Würfel sollte der Klassensprecher wählen, damit die Chancen auf keine Hausaufgaben möglichst groß sind?

(b) Der Lehrer kennt sich jedoch mit Wahrscheinlichkeitsrechnung aus und bittet darum den blauen Würfel zu entfernen und wählt danach den grünen Würfel. Wie sehen nun die Chancen auf einen Nachmittag ohne Hausaufgaben aus, wenn der Klassensprecher nur noch zwischen dem gelben und dem roten Würfel wählen darf?

Viel Spaß beim Lösen der Aufgaben.