



Lösungen Klassenstufen 11–12

Vorbemerkung: Im Folgenden geben wir jeweils eine mögliche Lösung zu den Wettbewerbsaufgaben des 8. Bayreuther Tages der Mathematik an. Natürlich kann es auch andere, evtl. sogar elegantere, Lösungswege geben. Über Hinweise zu alternativen Lösungswegen würden wir uns sehr freuen und auch bei Unklarheiten oder Fehlern möchten wir gerne davon hören; z.B. per Email an sascha.kurz@uni-bayreuth.de. Wir haben es uns nicht nehmen lassen, bei manchen Aufgaben noch einige Bemerkungen zum Hintergrund und den Verknüpfungen zur Universitätsmathematik anzugeben. Diese können teilweise schwieriger nachzuvollziehen sein – klar, es wird ja auch Universitätsstoff angedeutet. Wir hoffen, dass sich anfängliches Zurückschrecken in Erstaunen darüber wandeln wird, wie mächtig mathematische Methoden sein können und wozu sie eingesetzt werden können.

Aufgabe 1:

Wir machen den Ansatz $p(x) = ax^2 + bx + c$, wobei $a, b, c \in \mathbb{Z}_{11}$. Einsetzen der drei Teilgeheimnisse liefert die Gleichungen

$$6 = 4a + 2b + c \quad (1)$$

$$3 = 16a + 4b + c \quad (2)$$

$$0 = 36a + 6b + c, \quad (3)$$

welche sich über $\mathbb{Z}_{11}$ zu

$$6 = 4a + 2b + c$$

$$3 = 5a + 4b + c$$

$$0 = 3a + 6b + c \quad (4)$$

vereinfachen lassen. Die zweite Gleichung plus zehn Mal die erste Gleichung (dies entspricht über $\mathbb{Z}_{11}$ der Differenz aus der zweiten und der ersten Gleichung) liefert

$$8 = a + 2b. \quad (5)$$

Die erste Gleichung plus zehn Mal die dritte Gleichung liefert

$$6 = a + 7b. \quad (6)$$

Gleichung (6) plus zehn Mal Gleichung (5) liefert

$$9 = 5b. \quad (7)$$

Durch Multiplikation mit 9 erhalten wir $b = 4$. Einsetzen in Gleichung (5) liefert $a = 0$. Einsetzen beider Werte in Gleichung (4) liefert $c = 9$. Das Polynom lautet also

$$p(x) = 4x + 9$$

und damit das Geheimnis $S = p(0) = 9$.

Hinter dem beschriebenen Verfahren zur Teilung eines Geheimnisses steckt ein allgemeines Prinzip. Möchte man ein Geheimnis so auf eine Menge von n Personen verteilen, dass jede Teilgruppe von d -Personen aber keine Teilgruppe von $d - 1$ Personen das Geheimnis lüften kann, dann ist das sogenannte „Shamir Secret Sharing Scheme“ eine mögliche Realisierung: Wir wählen ein Polynom $p(x)$ vom Grad kleiner d über einem *Körper* mit mehr als n Elementen. Nummerieren wir die Personen von 1 bis n durch und seien $a_1, \dots, a_n$ verschiedene Elemente des Körpers, so geben wir Person Nr. i die Information $(a_i, p(a_i))$. Je d solche Punktepaare bestimmen das Polynom $p(x)$ vom Grad kleiner d eindeutig. Als Geheimnis wird $p(a_0)$ gewählt, wobei a_0 mit keinem der a_i übereinstimmen darf und öffentlich bekannt ist. Um in der Praxis durch einfache Durchprobieren der möglichen Lösungen zu vermeiden – es gibt ja beispielsweise in $\mathbb{Z}_{11}$ nur 11 Möglichkeiten – rechnet man i.A. über $\mathbb{Z}_p$, wobei p eine ziemlich große Primzahl ist.

(Endliche) Körper, wie z.B. $\mathbb{Z}_{11}$, werden in der „Einführung in die Algebra“ behandelt und auch in der „Kodierungstheorie“ oder „Kryptographie“ verwendet.

Aufgabe 2:

Wir betrachten zunächst zwei allgemeine Konstruktionen. Sei hierfür S eine Teilmenge maximaler Kardinalität k von N , so dass $f(S) = 0$.

- (1) Gebe allen Elementen aus S Gewicht 0 und den restlichen Elementen Gewicht 1. Damit ist f $(n - k)$ -gewichtet.
- (2) Gilt $f(\{i\}) = 1$, dann setze $w_i = 1$. Alle anderen Gewichte werden auf $\frac{1}{2}$ gesetzt. Damit ist f $\frac{k}{2}$ -gewichtet.

Gilt $k \geq \frac{n}{3}$ so wählen wir die erste Konstruktion, anderenfalls die zweite Konstruktion. Damit haben wir gezeigt, dass jede monotone Boolesche Funktion $\frac{n}{3}$ -gewichtet ist, was die Teilaufgaben (a) und (c) beantwortet.

Für $m \geq 2$ setze $A = \{1, \dots, m\}$ und $B = \{m + 1, \dots, 2m\}$. Wir legen eine monotone Boolesche Funktion nur teilweise fest, indem wir fordern

$$f(A) = f(B) = 0 \text{ und } f(\{a, b\}) = 1 \text{ für alle } a \in A, b \in B.$$

Mit w_A bezeichnen wir die Gewichtssumme der Elemente aus A und mit w_B die Gewichtssumme der Elemente aus B . Nun betrachten wir die Summe der Gewichte aller m^2 Paare $\{a, b\}$ mit $a \in A, b \in B$. Diese beträgt mindestens m^2 . Jedes Element kommt genau m Mal vor, so dass $m \cdot (w_A + w_B) \geq m^2$ gelten muss. Für die schwerere der beiden Mengen A, B erhalten wir

$$\max(w_A, w_B) \geq \frac{m}{2}.$$

Diese Konstruktion liefert für $m = 3$ eine monotone Boolesche Funktion f für $n = 6$ Elemente, die nicht α -gewichtet sein kann, falls $\alpha < \frac{3}{2}$. f ist also beispielsweise nicht 1,49-gewichtet, was Teilaufgabe (b) beantwortet.

Monotone Boolesche Funktionen kommen in der Analyse von Wahlsystemen vor – einem Teilgebiet der kooperativen Spieltheorie. Ein einfaches Beispiel für ein 1-gewichtetes Wahlsystem ist die einfache Mehrheitsregel in einer Klasse mit 25 Schülern, d.h. sind mindestens 13 Schüler für einen Vorschlag, so wird er angenommen, anderenfalls abgelehnt. Durch die Wahl der Gewichte von $\frac{1}{13}$ für jeden Schüler sieht man, dass dieses Beispiel sogar $\frac{12}{13}$ -gewichtet ist. 1-gewichtete Abstimmssysteme werden sehr gerne und häufig in der Praxis verwendet. Es gibt aber auch andere. Ein Beispiel für ein nicht 1-gewichtetes Wahlsystem ist die aktuelle Abstimmungsregel der Europäischen Union. Das kleinstmögliche α so dass eine gegebene Abstimmregel α -gewichtet ist misst quasi den *Abstand* zu einer 1-gewichteten Regel.

Im Forschungsartikel „On α -roughly weighted games“ (<http://arxiv.org/abs/1112.2861>) wird die Vermutung aufgestellt, dass für $n \geq 4$ jede monotone Boolesche Funktion $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor / n$ -gewichtet ist. Für gerade n zeigt die obere Konstruktion, dass dieser Wert nicht verringert werden kann. Für ungerade n gibt es eine ähnliche Konstruktion. Die hier dargestellte obere Schranke $\frac{n}{3}$ ist in der Tat die beste aktuell bekannte. Für $n \leq 9$ konnte die Vermutung mit Techniken aus der „Ganzzahligen Linearen Optimierung“ bestätigt werden. Auch wenn $n = 9$ noch eine recht kleine Zahl ist, gibt es hier bereits über 10^{42} verschiedene monotone Boolesche Funktionen. Da wir den aktuellen Wissensstand in dieser speziellen Frage fast vollständig in dieser knappen Lösung wiedergeben konnten, wäre es durchaus möglich, dass sich die angegebenen oberen Schranken auch mit Schülern zugänglichen Methoden verbessern lassen – man braucht nur eine gute Idee ...

Aufgabe 3:

Eine offene Kreisscheibe mit Radius r_i hat Durchmesser $2r_i$ und die Gesamtlänge der Schnittmenge mit jeder beliebigen Gerade beträgt weniger als $2r_i$. Geraden durch den Mittelpunkt der Kreisscheibe haben eine Gesamtlänge der Schnittmenge von mehr als $2r_i - \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$. (Wäre die Kreisscheibe abgeschlossen, was in anderen Worten bedeutet, dass sie ihren Rand

enthält, hätte der maximale Schnitt eine Länge von genau $2r_i$.) Für den Durchmesser $d_i = 2r_i$ jeder Kreisscheibe gilt also $d_i \leq 1$.

Sei nun die Anzahl der Kreisscheiben n mindestens zwei. Betrachten wir eine Gerade durch die Mittelpunkte zweier Kreisscheiben mit Durchmessern von d_i und d_j , so gilt $d_i + d_j \leq 1$. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass die Kreisscheiben dem Durchmesser nach fallend geordnet sind, also $1 \geq d_1 \geq d_2 \geq \dots d_n > 0$ gilt.

Wir behaupten, dass die Gesamtfläche der Kreisscheiben durch

$$\frac{\pi}{4} \cdot \max(1, n/4)$$

nach oben beschränkt ist.

Falls $d_1 \leq \frac{1}{2}$, so gilt $d_i \leq \frac{1}{2}$ für alle $1 \leq i \leq n$ und somit $\frac{\pi}{4} \cdot d_i^2 \leq \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{4}$. Aufsummieren liefert dann die behauptete obere Schranke.

Ist nun $d_1 > \frac{1}{2}$, so gilt $d_i \leq 1 - d_1 < \frac{1}{2} < d_1$ für alle $2 \leq i \leq n$. Falls irgendeine der letzten Kreisscheiben einen Durchmesser kleiner als $1 - d_1$ hätte, könnten wir den Flächeninhalt erhöhen, indem wir den Durchmesser dieser Kreisscheibe auf $1 - d_1$ vergrößern. Im Folgenden nehmen wir also an, dass die $n - 1$ kleineren Kreisscheiben alle einen Durchmesser von $1 - d_1 < d_1$ besitzen.

Für $n = 2$ Kreisscheiben ist der mit $\frac{4}{\pi}$ multiplizierte Gesamtflächeninhalt gegeben durch

$$d_1^2 + 1(1 - d_1)^2 = 2d_1^2 + 1 - 2d_1 = 1 - 2 \underbrace{d_1}_{>0} \underbrace{(1 - d_1)}_{>0} < 1.$$

Für $n = 3$ Kreisscheiben ist der mit $\frac{4}{\pi}$ multiplizierte Gesamtflächeninhalt gegeben durch

$$d_1^2 + 2(1 - d_1)^2 = 3d_1^2 + 2 - 4d_1 = 1 - \underbrace{d_1}_{>0} \underbrace{(1 - d_1)}_{>0} - \underbrace{(2d_1 - 1)}_{>0} \underbrace{(1 - d_1)}_{>0} < 1.$$

Für $n \geq 4$ Kreisscheiben schreiben wir den Durchmesser von Kreisscheibe 1 als $\frac{1}{2} + x$, so dass der Durchmesser der $n - 1$ kleineren Kreisscheiben durch $\frac{1}{2} - x$ gegeben ist. Für den mit $\frac{4}{\pi}$ multiplizierten Gesamtflächeninhalt gilt

$$d_1^2 + (n - 1)(1 - d_1)^2 = n/4 + nx^2 - (n - 2)x < n/4 - (n/2 - 2)x \leq n/4,$$

da $x < \frac{1}{2}$.

Die sich in allen Teilfällen ergebende obere Schranke von $\frac{\pi}{4} \cdot \max(1, n/4)$ kann tatsächlich (asymptotisch) erreicht werden. Für $n \geq 4$ platzieren wir die Mittelpunkte von n Kreisscheiben mit Durchmessern von jeweils $\frac{1}{2}$ auf den Ecken eines regelmäßigen n -Ecks $\mathcal{N}$. Wählen wir nun noch den Umkreisradius von $\mathcal{N}$ hinreichend groß, so schneidet jede Gerade maximal zwei Kreisscheiben und die geforderte Bedingung an die Länge der entsprechenden Schnittmenge ist erfüllt. Für $n \leq 4$ und $\varepsilon > 0$ platzieren wir eine Kreisscheibe mit Durchmesser $1 - \varepsilon$ und $n - 1$ Kreisscheiben mit Durchmessern von jeweils ε/n disjunkt mit Mittelpunkten auf der x -Achse. Wird ε klein, so strebt der Flächeninhalt gegen $\frac{\pi}{4}$.

- (a) Der maximale Flächeninhalt einer tomographie-geeigneten Kreisscheibe beträgt $\frac{\pi}{4}$.
- (b) Der maximale Flächeninhalt zweier tomographie-geeigneter Kreisscheibe beträgt ebenfalls $\frac{\pi}{4}$.
- (c) Der maximale Flächeninhalt von 2013 tomographie-geeigneten Kreisscheiben beträgt $\frac{2013\pi}{16}$.

Kann man bereits Funktionen mit einer Variable, mit Hilfe der Differentialrechnung, maximieren, so kann man den letzten Teil der soeben geführten Diskussion leicht abkürzen. Der einzige Freiheitsgrad war der Durchmesser $\frac{1}{2} \leq d_i \leq 1$, den wir im Folgenden mit x bezeichnen. Damit ergibt sich ein Gesamtflächeninhalt der Kreisscheiben von

$$f_n = \frac{\pi}{4} \cdot (x^2 + (n - 1)(1 - x)^2) = \frac{\pi}{4} \cdot (nx^2 + (n - 1) - 2(n - 1)x).$$

Ein lokales Maximum von f_n wird entweder am Rand oder in einem inneren Punkt, in dem die erste Ableitung verschwindet, angenommen. Es gilt $f_n(1) = 1$ und $f_n(1/2) = n/4$. Die erste Ableitung von $f_n(x)$ lautet $2nx - 2(n-1)$. Nullsetzen und Auflösen ergibt $x = (n-1)/n$. Einsetzen liefert $f_n((n-1)/n) = (n-1)/n < 1$. Alternativ kann man auch anhand der zweiten Ableitung von $f_n(x)$ ablesen, dass an dieser Stelle ein lokales Minimum angenommen wird. Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen wird an der Universität Bayreuth gleich im ersten Semester behandelt, entweder in der Mathematikvorlesung „Analysis I“ oder den Serviceveranstaltungen „Mathematische Grundlagen für Naturwissenschaftler“ (oder Ingenieure, Wirtschaftswissenschaftler).

Wir bemerken, dass sich die Aussage leicht auf d -dimensionale Kugeln verallgemeinert lässt. Interessant und auch mathematisch recht anspruchsvoll wird es, wenn man Punktmengen maximalen Flächeninhaltes betrachtet, bei denen keine zwei Punkte der Menge einen ganzzahligen Abstand besitzen. Interessierte sind auf den kürzlich bekannt gemachten Forschungsartikel „Open sets avoiding integral distances“, der eine Reihe von netten Graphiken enthält, verwiesen: <http://arxiv.org/abs/1204.0403>.

Aufgabe 4:

Zählen wir zunächst die Anzahl der Quadrate, getrennt nach ihrer Seitenlänge, in den ersten paar Konstruktionsschritten:

- Nach Schritt 1 gibt es genau 1 Quadrat mit Seitenlänge 1.
- Nach Schritt 2 gibt es genau 1 Quadrat mit Seitenlänge 1 und 4 Quadrate mit Seitenlänge $\frac{1}{2}$.
- Nach Schritt 3 gibt es genau 1 Quadrat mit Seitenlänge 1, 4 Quadrate mit Seitenlänge $\frac{1}{2}$ und 12 Quadrate mit Seitenlänge $\frac{1}{4}$.
- Nach Schritt 3 gibt es genau 1 Quadrat mit Seitenlänge 1, 4 Quadrate mit Seitenlänge $\frac{1}{2}$, 12 Quadrate mit Seitenlänge $\frac{1}{4}$ und 36 Quadrate mit Seitenlänge $\frac{1}{8}$.

Allgemein gibt es nach dem n -ten Schritt genau ein Quadrat mit Seitenlänge 1 und $4 \cdot 3^{i-1}$ Quadrate mit Seitenlänge $\left(\frac{1}{2}\right)^i$ für alle $1 \leq i \leq n-1$. Damit ergibt sich bei den sechs Teilfragen:

$$(a) \quad A_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} 4 \cdot 3^{i-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} = 1 + \sum_{i=0}^{n-2} \left(\frac{3}{4}\right)^i = 1 + \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{1 - \frac{3}{4}} = 5 - 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 5 - 4 \cdot 0 = 5$$

$$(c) \quad U_n = 4 + \sum_{i=1}^{n-1} 4 \cdot 3^{i-1} \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i = 4 + 8 \sum_{i=0}^{n-2} \left(\frac{3}{2}\right)^i = 4 + 8 \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{3}{2}} = 16 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 12$$

$$(d) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \infty$$

$$(e) \quad s_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 + \sum_{i=0}^{n-2} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

Der Grenzwert ist 3, so dass nach Teil (b) im Grenzwert $\frac{5}{9}$ der Fläche gefüllt ist.

$$(f) \quad q_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} 4 \cdot 3^{i-1} = 1 + 4 \cdot \sum_{i=0}^{n-2} 3^i = 1 + 4 \cdot \left(\frac{1 - 3^{n-1}}{1 - 3}\right) = 2 \cdot 3^{n-1} - 1.$$

Grenzwerte und unendliche Reihen werden beispielsweise in der „Analysis I“ oder in den „Mathematischen Grundlagen für Wirtschaftswissenschaftler“ behandelt. Für iterativ durchgeführte Konstruktionen gibt es noch mehrere Definitionen der sogenannten *fraktalen Dimension*. Würden die Quadrate in jedem Schritt etwas weniger als halbiert werden, so käme es zu Überlappungen.

Die Graphik des n -ten Musters mit Hilfe eines Computerprogramms zu erzeugen ist eine nette kleine Programmieraufgabe. Wir haben das L^AT_EX-Paket Asymptote verwendet:

```

size(0,100);
path s1=(0,0)--(0,1)--(1,1)--(1,0)--cycle;
path s2=(0,0)--(0,2)--(2,2)--(2,0)--cycle;
path s4=(0,0)--(0,4)--(4,4)--(4,0)--cycle;
path s8=(0,0)--(0,8)--(8,8)--(8,0)--cycle;

for(int a=0;a<4;++a)
{
    filldraw(shift(25*a,0)*shift(7,7)*s8,black);
    if(a>0)
    for(int i1=0; i1<=1;++i1)
    for(int i2=0; i2<=1;++i2)
    {
        filldraw(shift(25*a,0)*shift(3+i1*12,3+i2*12)*s4,black);
        if(a>1)
        for(int j1=0; j1<=1;++j1)
        for(int j2=0; j2<=1;++j2)
        if(1-i1!=j1 || 1-i2!=j2)
        {
            filldraw(shift(25*a,0)*shift(1+i1*12+6*j1,1+i2*12+6*j2)*s2,black);
            if(a>2)
            for(int h1=0; h1<=1;++h1)
            for(int h2=0; h2<=1;++h2)
            if(1-h1!=j1 || 1-h2!=j2)
            {
                filldraw(shift(25*a,0)*shift(i1*12+6*j1+3*h1,i2*12+6*j2+3*h2)*s1,black);
            }
        }
    }
}

shipout("fraktal", bbox(currentpicture, xmargin=1pt, p=invisible), format="pdf");

```