Lösungen Klassenstufen 5–6

Vorbemerkung: Im Folgenden geben wir jeweils eine mögliche Lösung zu den Wettbewerbsaufgaben des 8. Bayreuther Tages der Mathematik an. Natürlich kann es auch andere, evtl. sogar elegantere, Lösungswege geben. Über Hinweise zu alternativen Lösungswegen würden wir uns sehr freuen und auch bei Unklarheiten oder Fehlern möchten wir gerne davon hören; z. B. per Email an sascha.kurz@uni-bayreuth.de.

Aufgabe 1:

Da sich beim Menschen Zähne üblicherweise gleichmäßig auf Ober- und Unterkiefer aufteilen, gibt es genau $2 \cdot (32/2 - 1) = 30$ Zahnzwischenräume.

Aufgabe 2:

Da eine Münze (4) genauso viel wie eine (1)- und eine (2)-Münze wert ist ((4) = (2) + (1)), liefert Austauschen in (3) + (3) = (4) + (2) die neue Identität

$$(3)+(3)=(2)+(2)+(1). \tag{1}$$

Austauschen in (3) + (4) = (2) + (2) + (2) liefert

$$(3)+(2)+(1)=(2)+(2)+(2), \tag{2}$$

so dass ein Entfernen einer (2)-Münze auf beiden Seiten zu

$$(3)+(1)=(2)+(2) \tag{3}$$

führt. Aus Identität (1) erhält man durch Hinzufügen einer (1)-Münze auf beiden Seiten

$$(3)+(3)+(1)=(2)+(2)+(1)+(1). \tag{4}$$

Ersetzt man hierin eine (3)- und eine (1)-Münze durch zwei (2)-Münzen (siehe Identität (3)), so ergibt sich

$$(3)+(2)+(2)=(2)+(2)+(1)+(1). \tag{5}$$

Entfernt man nun nur noch jeweils zwei (2)-Münzen, so erhält man schlussendlich

$$(1)+(1)=(3), \tag{6}$$

was die Frage eindeutig beantwortet und manchen Erwachsenen hoffentlich nicht allzu viele graue Haare bereitet.

Ähnlich, aber evtl. etwas kürzer, kann man auch wie folgt argumentieren: Addiert man jeweils die linken und die rechten Seiten der Gleichungen

$$\begin{aligned}(3)+(4) &= (2)+(2)+(2)\\ (4)+(2) &= (3)+(3)\\ (1)+(2) &= (4)\\ (1)+(2) &= (4),\end{aligned}$$

so ergibt sich

$$(4)+(4)+(3)+(2)+(2)+(2)+(1)+(1)=(4)+(4)+(3)+(3)+(2)+(2)+(2),$$

was sich zu (1) + (1) = (3) vereinfachen lässt.

Mit etwas mehr mathematisch-algorithmischem Vorwissen kann man die Aufgabe auch routinemäßig ohne allzuviel Nachdenken lösen. Bezeichnet man die unbekannten Werte der Münzen

①, ②, ③ und ④ der Reihe nach mit den *Variablen* a, b, c und d, so kann man die Information aus der Aufgabenstellung auch in Form eines sogenannten linearen Gleichungssystems schreiben:

$$\left|\begin{array}{rcl} c+d & = & 3b \\ d & = & a+b \\ 2c & = & b+d \end{array}\right|,$$

was sich zu

$$\left|\begin{array}{rcl} a+b-d & = & 0 \\ b-2c+d & = & 0 \\ 3b-c-d & = & 0 \end{array}\right|$$

umformen lässt. Mit Hilfe des sogenannten Gaußalgorithmus, den man an der Universität Bayreuth beispielsweise in den Veranstaltungen „Lineare Algebra I“ oder „Mathematische Grundlagen für Wirtschaftswissenschaftler“ lernen kann, ist es möglich die vollständige Lösungsmenge eines beliebigen linearen Gleichungssystems zu bestimmen. In unserem Fall wird die Lösungsmenge beschrieben durch $b = \frac{3}{2}a$, $c = 2a$, $d = \frac{5}{2}a$ (bzw. $\mathbb{L} = \langle (2,3,4,5)^T \rangle$ für die Experten). Relevant ist hier $c = 2a$, was ① + ① = ③ entspricht.

Die Insel Bishop Rock gibt es übrigens wirklich; sie ist als die kleinste bebaute Insel der Welt im Guinnessbuch der Rekorde zu finden. Das etwas gewöhnungsbedürftige Geldsystem haben wir uns allerdings selber ausgedacht. Die Gewichte der einzelnen Münzen sind in etwa so gewählt, dass der Materialwert bei allen Münzen gleich ist, d.h. man kann sich das Ganze so vorstellen, dass der Wert einer Münze dem aufgedruckten Wert plus eins entspricht.

Aufgabe 3:

Auf dem ersten Baum saßen ursprünglich 15, auf dem zweiten 14 und auf dem dritten 27 Vögel, so dass die Verteilung am Ende 8, 16, 32 betragen hat.

Auch hier ist eine Lösung mit linearen Gleichungssystemen möglich. Die zugehörigen Gleichungen lauten $a + b + c = 56$, $b + 2 = 2(a - 7)$ und $c + 5 = 2(b + 2)$.

Aufgabe 4:

Das Treffen sollte in Bayreuth stattfinden. Dann müssen nämlich nur die 25 Autos aus Frankreich die volle Entfernung Annecy–Bayreuth fahren. Bei jedem anderem Ort X müssten 25 Autos aus Annecy zum Punkt X fahren. Zusammen mit 25 der 35 Autos aus Bayreuth, die von Bayreuth aus zum Punkt X fahren müssen, ergibt sich eine Gesamtfahrstrecke, die mindestens so lang ist wie 25 mal die Entfernung zwischen Annecy und Bayreuth. Hinzu kommen würden aber noch die Wegstrecken der verbleibenden 10 Autos aus Bayreuth, die auch zum Punkt X fahren müssten.

Gehen wir davon aus, dass der Treffpunkt X auf der direkten Verbindung zwischen Annecy und Bayreuth liegt, was wegen der Dreiecksungleichung und der Minimalität erfüllt sein muss, so können wir die Aufgabe auch etwas formaler lösen: Mit $0 \leq S \leq 1$ bezeichnen wir den Anteil der Strecke von Bayreuth zum Treffpunkt X an der Fahrstrecke von Annecy nach Bayreuth. Ziel ist es $35S + 25(1 - S) = 10S + 25$ für $0 \leq S \leq 1$ zu minimieren. Das Minimum wird offensichtlich bei $S = 0$ angenommen.

Aufgabe 5:

Eine Verringerung der Wartezeit auf $\frac{1}{4}$ bedeutet einen Abstand bzw. eine Wartezeit von 6 Minuten. Somit werden für die Gesamtfahrstrecke mit einer Durchfahrtdauer von $3 \cdot 24 = 72$ Minuten insgesamt $72/6 = 12$ Busse benötigt.

Aufgabe 6:

Da die Hälfte der 258 Plätze bereits für Produkt 3 reserviert sind, sind noch 129 Plätze frei zu vergeben, mit denen 96 600 Taler verdient werden sollen. Werden alle verbleibenden 129 Plätze

teuerstmöglich verkauft, ergibt sich ein Ertrag von 96 750 Talern, also genau 150 Taler mehr als benötigt. Die günstigen Verkaufsmöglichkeiten lassen sich also wie folgt charakterisieren. Von Produkt 3 werden genau 129 Plätze verkauft. Von Produkt 1 müssen mindestens 128 Plätze verkauft werden und von Produkt 1 und Produkt 2 müssen insgesamt mindestens 129 Plätze verkauft werden.

Aufgabe 7:

In jeder Zeile wiederholen sich die Zahlen alle vier Einträge. In den ersten $4 \cdot 503 = 2012$ Spalten kommen alle vier Zahlen gleichhäufig vor. In der letzten Spalte wiederholen sich die Zahlen alle vier Einträge. Da der erste Eintrag 1 lautet, kommt die Farbe 1 genau ein Mal häufiger vor als die Farben 2, 3 oder 4.