Lösungen Klassenstufen 9–10

Vorbemerkung: Im Folgenden geben wir jeweils eine mögliche Lösung zu den Wettbewerbsaufgaben des 8. Bayreuther Tages der Mathematik an. Natürlich kann es auch andere, evtl. sogar elegantere, Lösungswege geben. Über Hinweise zu alternativen Lösungswegen würden wir uns sehr freuen und auch bei Unklarheiten oder Fehlern möchten wir gerne davon hören; z.B. per Email an sascha.kurz@uni-bayreuth.de. Wir haben es uns nicht nehmen lassen, bei manchen Aufgaben noch einige Bemerkungen zum Hintergrund und den Verknüpfungen zur Universitätsmathematik anzugeben. Diese können teilweise schwieriger nachzuvollziehen sein – klar, es wird ja auch Universitätsstoff angedeutet. Wir hoffen, dass sich anfängliches Zurückschrecken in Erstaunen darüber wandeln wird, wie mächtig mathematische Methoden sein können und wozu sie eingesetzt werden können.

Aufgabe 1:

Der Flächeninhalt des Bildes beträgt $a \cdot b$ und der des Rahmens beträgt $2a + 2b + 4$.

- Für $b = 1$ müsste gelten $2a + 6 = a$, was zu $a = -6$ führt.
- Für $b = 2$ müsste gelten $2a + 8 = 2a$, was unlösbar ist.
- Für $b = 3$ müsste gelten $2a + 10 = 3a$, was zu $a = 10$ führt.
- Für $b = 4$ müsste gelten $2a + 12 = 4a$, was zu $a = 6$ führt.
- Für $b \geq 5$ gilt
$$ab \geq 2a + 2a + a > 2a + 2b + 4,$$
so dass Gleichheit nicht möglich ist.

Die einzigen beiden Möglichkeiten lauten also $(10; 3)$ und $(6; 4)$.

Die allgemeinere Frage ganzzahlige Punkte auf Kurven zweiten Grades in zwei Variablen, also Polynomen der Form $a_0 + a_1X + a_2Y + a_3XY + a_4X^2 + a_5Y^2$, zu bestimmen, wird z.B. in der Veranstaltung „Diophantische Gleichungen“ angesprochen.

Aufgabe 2:

Einen Betrag von n Cent kann man genau auf eine einzige Art und Weise mit 1-Cent Stücken bezahlen – man muss n 1-Cent Münzen verwenden. Hat man zusätzlich noch 2-Cent Münzen zur Verfügung, so kann man bis zu $\lfloor n/2 \rfloor$ (Bedeutung: n durch 2, abgerundet) 2-Cent Münzen verwenden und den Rest mit 1-Cent Münzen bezahlen. Als Anzahl der Möglichkeiten ergibt sich
$$f_1(n) = 1 \quad \text{und} \quad f_{1,2}(n) = \lfloor n/2 \rfloor + 1.$$
Betrachten wir nun 5- und 10-Cent Münzen. Da beide Werte durch 5 teilbar sind, kann man damit nur Vielfache von 5-Cent Beträgen exakt bezahlen. Division durch 5 führt das Problem der Anzahl der Möglichkeiten in den übrigen Fällen auf das vorherige mit 1- und 2-Cent Münzen zurück. Als Anzahl der Möglichkeiten ergibt sich also
$$f_{5,10}(n) = \begin{cases} \lfloor n/10 \rfloor + 1 & : \quad 5 \text{ teilt } n, \\ 0 & : \quad \text{sonst.} \end{cases}$$
Die Anzahl der Möglichkeiten einen 99-Cent Artikel mit 1-, 2-, 5- oder 10-Cent Münzen zu bezahlen, setzt sich aus beiden betrachteten Teilproblemen zusammen, so dass sich
$$f_{5,10}(0) \cdot f_{1,2}(99) + f_{5,10}(5) \cdot f_{1,2}(94) + f_{5,10}(10) \cdot f_{1,2}(89) + \cdots + f_{5,10}(95) \cdot f_{1,2}(4) = 2090$$
Möglichkeiten ergeben.

Mit ein paar Formeln kann man sich auch das Ausrechnen dieser Summe von Produkten ein wenig erleichtern. Unter Verwendung des Summenzeichens können wir auch

$$\sum_{i=0}^{9} f_{5,10}(10i) \cdot f_{1,2}(99-10i) + f_{5,10}(10i+5) \cdot f_{1,2}(99-10i-5)$$

für die Anzahl der Möglichkeiten einen 99-Cent Artikel mit 1-, 2-, 5- oder 10-Cent Münzen zu bezahlen schreiben. Mit Hilfe der Formeln für $f_{1,2}(n)$ und $f_{5,10}(n)$ vereinfachen wir dies zu

$$\sum_{i=0}^{9} (i+1) \cdot (50-5i) + (i+1) \cdot (48-5i) = \sum_{i=0}^{9} 98 + 88i - 10i^2.$$

Verwenden wir nun die Summationsformeln

$$\sum_{i=0}^{n} 1 = (n+1), \quad \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \text{ und } \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

so ergibt sich ebenfalls

$$10 \cdot 98 + 88 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} - 10 \cdot \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} = 2090.$$

Lässt man sich auf eine etwas gewöhnungsbedürftige mathematische Darstellung ein, kann man solche Münzbezahlprobleme auch ganz allgemein durch Polynommultiplikation behandeln. Mit $f_{a_1,\ldots,a_r}(n)$ wollen wir die Anzahl der Möglichkeiten bezeichnen, einen Betrag n mit Münzen der Werte $a_1, \ldots, a_r$ zu bezahlen. Vorher hatten wir bereits Beispiele für $f_1(n)$, $f_{1,2}(n)$ und $f_{5,10}(n)$ gesehen. Jeder solchen Funktion wollen wir nun ein Polynom (oder genauer eine Potenzreihe) zuordnen:

$$g_{a_1,\ldots,a_r}(x) = f_{a_1,\ldots,a_r}(0) \cdot x^0 + f_{a_1,\ldots,a_r}(1) \cdot x^1 + f_{a_1,\ldots,a_r}(2) \cdot x^2 + f_{a_1,\ldots,a_r}(3) \cdot x^3 + \ldots$$

Die Funktionswerte übernehmen also die Rolle der Koeffizienten des Polynoms. Das Schöne an dieser Darstellung ist, dass das Zusammensetzen von disjunkten Münzmengen der Polynommultiplikation entspricht, also etwa

$$g_{1,2,5,10}(x) = g_{1,2}(x) \cdot g_{5,10}(x).$$

(In obiger Lösung haben wir den Koeffizienten von x^{99} in $g_{1,2,5,10}(x)$ berechnet.)

Für nur eine Münze mit (ganzzahligem) Wert a haben wir

$$g_a(x) = 1 + x^a + x^{2a} + x^{3a} + \ldots.$$

Berechnen wir damit beispielhaft $g_{1,2}(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots) \cdot (1 + x^2 + x^4 + \ldots) = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \ldots$$

Wenn wir nun noch die unendliche geometrische Reihe verwenden erhalten wir

$$g_a(x) = \frac{1}{1-x^a},$$

woraus wir sofort die allgemeine *Formel*

$$g_{a_1,\ldots,a_r}(x) = \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{1-x^{a_i}} = \frac{1}{1-x^{a_1}} \cdot \frac{1}{1-x^{a_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-x^{a_r}}$$

erhalten. Solche Funktionen heißen übrigens erzeugende Funktionen und kommen in der Algebraischen Kombinatorik vor. Mit Hilfe der sogenannten Taylorentwicklung (die man entweder in der Oberstufe oder in der „Analysis“ kennenlernt) kann man dann z.B. die Koeffizienten einer solchen Potenzreihe berechnen.

Aufgabe 3:

Wir nehmen an, dass auf Gläubiger 2 und 3 insgesamt eine Summe von $x_2 + x_3 = S$ verteilt wird. Dabei muss natürlich $0 \leq S \leq 2000$ gelten. Da die zur Verfügung stehende Summe S in keinem Fall zur Befriedigung der Ansprüche von einem Gläubiger reicht, gilt $x_2 = S/2$ und $x_3 = S/2$ in einer *fairen* Aufteilung. Da alles aufgeteilt wird, gilt noch $x_1 = 2000 - S$. Betrachten wir nun das Paar bestehend aus Gläubiger 1 und Gläubiger 3. Hier sind $E^{(1,3)} = (2000 - S) + (S/2) = 2000 - S/2$ zu verteilen. Da $S \leq 2000$, reicht diese Summe $E^{(1,3)}$ in jedem Fall aus, um Gläubiger 1 zufrieden zu stellen. Der *sichere* Anteil von Gläubiger 3 beträgt somit $1000 - S/2$. Der sichere Anteil von Gläubiger 1 dagegen ist Null, da die zur Verfügung stehende Summe $E^{(1,3)}$ nicht zur Befriedigung der geforderten 3000 von Gläubiger 3 ausreicht. Der Rest von $(2000 - S/2) - (1000 - S/2) = 1000$ wird gleichmäßig auf Gläubiger 1 und Gläubiger 3 verteilt. Es muss also

$$x_1 = 2000 - S = \frac{1000}{2} \quad \text{und} \quad x_3 = S/2 = 1000 - S/2 + \frac{1000}{2}$$

gelten. Die eindeutige Lösung ist hier $S = 1500$, so dass sich

$$x_1 = 500,\ x_2 = 750 \text{ und } x_3 = 750$$

ergibt. Der Vollständigkeit halber können wir noch nachprüfen, dass auch die Aufteilung für das Paar von Gläubiger 1 und Gläubiger 2 *fair* ist. Zur Verfügung stehen $500 + 750 = 1250$. Hiervon hat Gläubiger 2 genau 250 und Gläubiger 1 gar nichts sicher. Wenn der Rest von $1250 - 250 = 1000$ gleichmäßig auf beide aufgeteilt wird, so ergibt sich die Aufteilung 500, 750.

Die hinter dem Zwei-Personen Bankrottspiel stehende Idee findet sich bereits im jüdischen Gesetzestext Talmud. Bei dem dort beschriebenen Problem ging es um einen Mann, der seinen drei Frauen testamentarisch 300, 200 und 100 Zuzim vermacht hatte. Als er starb, stellte sich jedoch heraus, dass sein Vermögen bloß 200 Zuzim betrug. Wie sollte die Erbmasse aufgeteilt werden? Heutige Erbvollstrecker sprächen den Frauen proportional zu ihren Ansprüchen die Hälfte, ein Drittel und ein Sechstel des Nachlasses zu. Der Talmud kam aber zu einem anderen Ergebnis: die ersten beiden Ehefrauen sollten je 75, die dritte 50 Zuzim erhalten. Die Frage, wie die jüdischen Weisen auf diese rätselhaften Zahlen gekommen sind, wurde im Rahmen dieser Aufgabe für das spezielle Beispiel beantwortet. (Wir haben die Ansprüche einfach nur mit 10 malgenommen.)

Für den allgemeinen Fall von 3 und mehr Gläubigern war jedoch bis 1985 unklar, wie eine solche faire Aufteilung zu berechnen ist, und vor allem, ob es immer eine eindeutige Lösung gibt. Letzteres konnte dann von Robert Aumann (Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften im Jahr 2005) und Michael Maschler in dem Aufsatz „Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talmud“, erschienen in der Zeitschrift „Journal of Economic Theory“, positiv beantwortet werden: Es gibt in jedem Fall eine eindeutige Lösung. Der Weg dorthin war die Definition eines zugehörigen TU Spiels (N, v). (Für die Experten und alle, die es wissen wollen: Für die Gläubigermenge $N := \{1, \ldots, n\}$ mit Ansprüchen $d_1, \ldots, d_n$ und zu verteilendem Vermögen $E < d_1 + \cdots + d_n$ definiere eine Funktion $v : \{S \subseteq N\} \to \mathbb{R}_{\geq}0$ durch $v(S) := \max\left(0, E - \sum_{i \in N \setminus S} d_i\right)$.) Die Lösung des Problems ist dann der sogenannte Nukleolus des Spiels – ein sehr berühmtes Lösungskonzept der Kooperativen Spieltheorie (Details können wir leider nicht darstellen), über das auch aktuell noch an der Universität Bayreuth interdisziplinär geforscht wird (z.B. am LS für Mikroökonomie und LS für Wirtschaftsmathematik).

Robert Aumann weist übrigens gerne darauf hin, dass der Talmud eine Fundgrube für die Wirtschaftstheorie inkl. deren mathematischer Analyse sei. Grundgedanken zu Risikoaversion, Standardisierung von Maßen und Gewichten, freiem Wettbewerb und unsichtbarer Hand sind in dem bald zwei Jahrtausende alten jüdischen Gesetzeswerk zu finden.

Für das 4-Gläubiger Beispiel $E = 60$, $d_1 = 10$, $d_2 = 20$, $d_3 = 30$, $d_4 = 40$ lautet die Lösung $x_1 = 5$, $x_2 = 10$, $x_3 = 17{,}5$, $x_4 = 27{,}5$.

Aufgabe 4:

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Auto hinter einem Tor befindet, ist für alle sechs Tore gleich groß. Bei (a) lautet die gesuchte Wahrscheinlichkeit also $\frac{1}{6}$, da die Wahrscheinlichkeit für ein Auto hinter einem bestimmten Tor sich nicht ändert, wenn andere Tore geöffnet werden.

Wenn die Kandidatin dagegen ihre Wahl verändert, sieht die Situation ein bißchen anders aus. Hinter Tor 2 steht wieder mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$ ein Auto. In den übrigen $\frac{5}{6}$ der Fälle befindet sich das Auto hinter einem der fünf anderen Tore, jedoch nicht hinter dem vom Showmaster geöffneten. Beim Wechseln hat man also eine Chance von $\frac{1}{4}$ auf das Tor mit dem Auto getippt zu haben, wenn man beim ersten Versuch nicht auf das Tor mit dem Auto getippt hatte. Insgesamt ergibt sich also eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{24}$, was ein wenig größer als $\frac{1}{6} = \frac{4}{24}$ ist. Diese Argumentation gilt sowohl bei (b) als auch (c), hängt also nicht vom gezeigten Tier ab.

Diese Aufgabe ist eine leicht abgewandelte Version einer sehr bekannten Stochastikaufgabe, die schon viele ziemlich intelligente Leute verwirrt hat. In der einfacheren Version geht es um drei Tore hinter denen sich zwei Ziegen und ein Auto verbergen. Hier kann man durch den Wechsel seine Gewinnwahrscheinlichkeit deutlich von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{2}{3}$ erhöhen. Intuitiv hätte man dies wohl nicht gedacht. Es kommt aber relativ häufig vor, dass Menschen Wahrscheinlichkeiten nicht so gut einschätzen können. Mit etwas Systematik, z.B. einem Wahrscheinlichkeitsbaum, wie man ihn u.a. in der „Einführung in die Stochastik“ und „Statistische Methoden I“ lernt, kann man Verwirrungen in der Regel vermeiden.

Aufgabe 5:

Wir berechnen zunächst die Gewinnwahrscheinlichkeiten der einzelnen Würfel gegeneinander:

1. \ 2.	gelb	rot	blau	grün
gelb	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
rot	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$
blau	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$
grün	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$

Exemplarisch berechnen wir die Gewinnwahrscheinlichkeit eines roten gegen einen blauen Würfel. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{4}{6}$ würfelt der rote Würfel eine 2. Gewinnen kann er nur, wenn der blaue Würfel eine 1 würfelt, was mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{6}$ passiert. Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{6}$ würfelt der rote Würfel eine 6 und gewinnt damit in jedem Fall. Eine kurze Rechnung

$$\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{6}{6} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

liefert die Gewinnwahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$. Wie häufig in der Stochastik, kann ein Baumdiagramm helfen nicht den Überblick zu verlieren. (Natürlich haben wir beim Erstellen der Tabelle Symmetrie ausgenutzt.)

(a) Der Klassensprecher sollte den gelben Würfel nehmen und damit die Wahrscheinlichkeit für einen hausaufgabenfreien Nachmittag auf $\frac{2}{3}$ zu maximieren.

(b) Der Klassensprecher sollte den roten Würfel nehmen und damit die Wahrscheinlichkeit für einen hausaufgabenfreien Nachmittag auf $\frac{5}{9}$ zu maximieren.

Schaut man sich die Würfel mal ein bißchen genauer an, so kann man eine interessante Entdeckung machen: Der gelbe Würfel gewinnt gegen den roten, der rote gewinnt gegen den

blauen, der blaue gewinnt gegen den grünen und der grüne gewinnt gegen den gelben. (Etwas genauer müssen wir eigentlich sagen, dass der eine Würfel eine höhere Wahrscheinlichkeit hat gegen den anderen zu gewinnen, als anders herum.) Für jeden Würfel gibt es also einen anderen Würfel, der ihn (wahrscheinlich) schlägt. Das widerspricht der Intuition, dass die *Stärke* eines Würfels, also genauer die Relation „ist mit größerer Wahrscheinlichkeit größer“, transitiv sein müsse.

Die vier intransitiven Würfel aus der Aufgabenstellung heißen übrigens Efrons Würfel und sind von dem amerikanischen Statistiker Bradley Efron erfunden worden. Ähnliche Phänomene kann man bei „Schere, Stein, Papier“ oder dem „Condorcet-Paradox“, aus der Analyse von Abstimmverfahren, entdecken. Interessant ist auch die Anekdote über die Verwendung dieser Würfel durch den amerikanischen Großinvestor Warren Buffett, siehe

`http://en.wikipedia.org/wiki/Nontransitive_dice`.

Weiterführende Überlegungen zu solchen intransitiven Würfeln finden sich beispielsweise hier:

`http://www.remath.de/xhomepage/Efron.pdf`

Relationen, egal ob transitiv oder intransitiv, begegnen einem während eines Studiums beispielsweise in der Vorlesung „Mathematische Grundlagen für Informatiker“. Auch die Würfel selber werden beispielsweise in Übungsaufgaben der „Statistischen Methoden I“ behandelt.