



Lösungen der Zusatzaufgaben

Vorbemerkung: Im Folgenden geben wir jeweils eine mögliche Lösung zu den Wettbewerbsaufgaben des 8. Bayreuther Tages der Mathematik an. Natürlich kann es auch andere, evtl. sogar elegantere, Lösungswege geben. Über Hinweise zu alternativen Lösungswegen würden wir uns sehr freuen und auch bei Unklarheiten oder Fehlern möchten wir gerne davon hören; z.B. per Email an sascha.kurz@uni-bayreuth.de. Wir haben es uns nicht nehmen lassen, bei manchen Aufgaben noch einige Bemerkungen zum Hintergrund und den Verknüpfungen zur Universitätsmathematik anzugeben. Diese können teilweise schwieriger nachzuvollziehen sein – klar, es wird ja auch Universitätsstoff angedeutet. Wir hoffen, dass sich anfängliches Zurückschrecken in Erstaunen darüber wandeln wird, wie mächtig mathematische Methoden sein können und wozu sie eingesetzt werden können.

Aufgabe 1:

Alle Wünsche sind erfüllt, wenn Herr Leibnitz auf 30D, Herr Gauss auf 30E, Herr Wiener auf 30F und Herr Cauchy auf 30G sitzt.

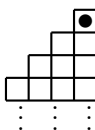
Es ist möglich die Aufgabenstellung, die die meisten wohl durch Ausprobieren und trickreichens Schließen lösen, in einen etwas größeren Rahmen einzubetten. Bei der Verifikation und dem Entwurf von logischen Schaltungen stellt sich manchmal das Teilproblem, zu entscheiden, ob eine aussagenlogische Formel durch geeignete Variablenbelegungen erfüllbar ist. Betrachten wir als Beispiel die Formel

$$A = (x_1 + \overline{x_3} + x_4) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_4}) \cdot (\overline{x_2} + x_3) \cdot (\overline{x_1} + x_2 + x_4),$$

wobei $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$, $\overline{x_i} = 1 - x_i$ und $1 + 1 = 1$ gelten soll. Hierbei soll 0 *falsch* und 1 *wahr* bedeuten. Gesucht ist eine Variablenbelegung, so dass $A = 1$ gilt bzw. ein Zertifikat dafür, dass es keine derartige Variablenbelegung gibt. Im Prinzip könnte man bei n Variablen einfach alle 2^n Möglichkeiten ausprobieren. Da n aber bei praktischen Problemen durchaus sehr groß werden kann, braucht man schnellere Algorithmen. Vom theoretischen Standpunkt aus gibt es wahrscheinlich keinen *schnellen* Algorithmus (genauer: einen mit polynomialer Laufzeit), da das sogenannte Erfüllbarkeitsproblem $\mathcal{NP}$ -vollständig ist. (Die Komplexitätsanalyse, also eine Art Laufzeitanalyse, von Algorithmen begegnet einem z.B. in Vorlesungen aus dem Bereich der „Theoretischen Informatik“ oder auch in den „Graphen- und Netzwerkalgorithmen“.) Nichtsdestotrotz gibt es Algorithmen, die praktische Probleme mit mehreren tausend Variablen innerhalb von Sekundenbruchteilen lösen können ¹.

Aufgabe 2:

Um die drei Teilaufgaben zu beantworten, betrachten wir allgemein, welche Treppen mit den insgesamt drei zur Verfügung stehenden Bauelementen konstruiert werden können. Die kleinen Teilquadrate der Bauelemente nennen wir *Bausteine*. Die drei Bauelemente bestehen in dieser Sprechweise aus 3, 4 bzw. 9 Bausteinen. Eine Treppe der Höhe 1 kann damit also von keiner der Firmen konstruiert werden. Treppen der Höhe zwei entsprechen einem Bauelement, was von beiden Unternehmen geliefert werden kann. Eine Treppe der Höhe 3 besteht aus genau 6 Bausteinen, so dass man sie höchstens mit zwei Bauelementen, bestehend aus 3 Bausteinen, konstruieren könnte. Dass dies nicht möglich ist, kann man leicht ausprobieren. Nun betrachten wir Treppen der Höhe mindestens 4 und fragen uns, welches Bauelement den rechten oberen Baustein abdecken kann:

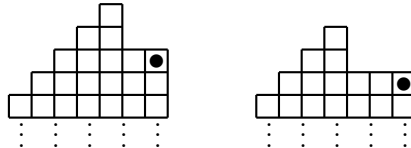


Hier kommt bei beiden Unternehmen nur das Bauelement aus drei Bausteinen in Frage, so dass folgender Rest übrig bleibt, von dem wir wieder den rechten oberen Baustein betrachten und uns fragen, von welchem Bauelement er abgedeckt werden kann:

¹<http://www.sat4j.org/>



Das Bauelement aus 3 Bausteinen darf hierzu nicht verwendet werden, da man ansonsten den Baustein links daneben nicht abdecken kann. Für beide Unternehmen bleibt also jeweils nur die Möglichkeit, das quadratische Bauelement zu verwenden. Wir betrachten anschließend wieder den am weitesten rechts liegenden oberen Baustein, der noch nicht abgedeckt wurde:



Die selbe Argumentation können wir jetzt wieder und wieder anwenden. D.h. der am weitesten rechts liegende obere Baustein, der noch nicht abgedeckt wurde, muss mit einem quadratischen Bauelement überdeckt werden. Das Ganze geht im Falle der Zweimalzwei AG genau dann auf, wenn die Höhe n eine gerade Zahl ist. Bei der Dreimaldrei OHG geht das Ganze genau dann auf, wenn die Höhe n bei Division durch 3 den Rest 2 hat.

Wir halten also Folgendes fest. Die Zweimalzwei AG kann genau dann Treppen der Höhe $n \geq 4$ bauen, wenn n eine gerade Zahl ist und sie Treppen der Höhe $n - 2$ bauen kann (was wieder eine gerade Zahl ist). Die Dreimaldrei OHG kann genau dann Treppen der Höhe n bauen, wenn n bei Division durch 3 den Rest 2 lässt und sie Treppen der Höhe $n - 3$ bauen kann (was bei Division durch 3 wiederum den Rest 2 lässt).

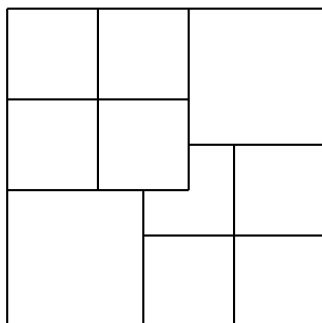
Vereinfacht ausgedrückt können wir also festhalten, dass die Zweimalzwei AG genau dann eine Treppe der Höhe n bauen kann, wenn n eine gerade Zahl ist und die Dreimaldrei OHG genau dann eine Treppe der Höhe n bauen kann, wenn n bei Division durch 3 den Rest 2 lässt.

- (a)
 - Treppen der Höhe 4 können nur von der Zweimalzwei AG konstruiert werden, da 4 gerade ist und bei Division durch 3 den Rest 1 lässt.
 - Treppen der Höhe 5 können nur von der Dreimaldrei OHG konstruiert werden, da 5 ungerade ist und bei Division durch 3 den Rest 2 lässt.
 - Treppen der Höhe 6 können nur von der Zweimalzwei AG konstruiert werden, da 6 gerade und durch 3 teilbar ist.
 - Treppen der Höhe 11 können nur von der Dreimaldrei OHG konstruiert werden, da 11 ungerade ist und bei Division durch 3 den Rest 2 lässt.
- (b) Da sowohl 7 als auch 13 ungerade Zahlen sind, die bei Division durch 3 den Rest 1 haben, kann keiner der beiden Treppenwünsche von einem der beiden Unternehmen realisiert werden.

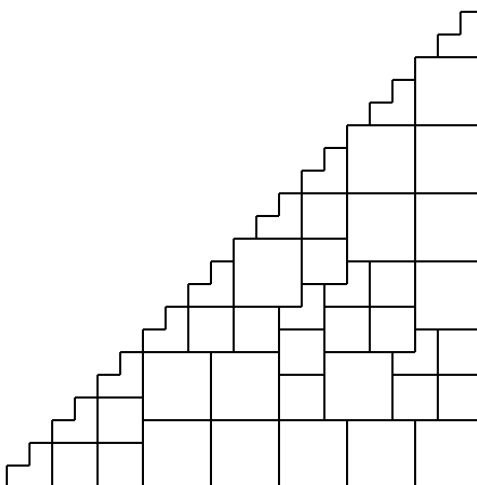
Schauen wir uns nun ganz allgemein an, welche Treppen von beiden Firmen in Kooperation konstruiert werden können. Wir wissen bereits, dass die Zweimalzwei AG eine Treppe der Höhe n konstruieren kann, wenn n eine gerade Zahl ist und die Dreimaldrei OHG eine Treppe der Höhe n konstruieren kann, wenn n bei Division durch 3 den Rest 2 lässt.

Mit drei nebeneinander gestellten Bauelementen aus vier Bausteinen kann man ein 6×2 Rechteck bauen und mit zwei nebeneinander gestellten Bauelementen aus neun Bausteinen kann man ein 6×3 Rechteck bauen. Kombiniert man diese Rechtecke geeignet miteinander, kann man für jedes $m \geq 2$ ein $6 \times m$ Rechteck bauen. Setzt man nun noch eine Treppe der Höhe 5 oben drauf, so kann man jede Treppe der Höhe $n \geq 2$ zu einer Treppe der Höhe $n + 6$ erweitern.

Ergänzen wir folgende Konstruktion eines 7×7 -Quadrats jeweils links und oben mit einer Treppe der Höhe 6, so erhalten wir eine Treppe der Höhe 13.



Für eine Treppe der Höhe 21 haben wir folgende Konstruktion



Mit einigen Fallunterscheidungen oder dem Lösen eines geeigneten ganzzahligen linearen Programms kann man herausfinden, dass Treppen der Höhen 7, 9 und 15 auch nicht von beiden Firmen gemeinsam gebaut werden können. Wie dies geht, kann man sich zum Beispiel im „Optimierungslabor“² anschauen bzw. ganz allgemein in der „Ganzzahligen Linearen Optimierung“ lernen. (Es dauert beispielsweise weniger als 1 Sekunde, um ein Beispiel für eine Treppe der Höhe 21 zu finden oder zu verifizieren, dass es keine Treppe der Höhe 15 geben kann.) Treppen der Höhe n können also genau dann errichtet werden, wenn $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 3, 7, 9, 15\}$.

Aufgabe 3:

Renate ist das Patenkind von Carl, Simon ist das Patenkind von Barbara, Thomas ist das Patenkind von Alf und Uli ist das Patenkind von Duran.

Aufgabe 4:

Wir berechnen zunächst die Gewinnwahrscheinlichkeiten der einzelnen Würfel gegeneinander:

1. \ 2.	gelb	rot	blau	grün
gelb	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
rot	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$
blau	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$
grün	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$

²<http://www.wm.uni-bayreuth.de/index.php?id=optlabor>; findet beispielsweise regelmäßig am Tag der Mathematik statt

Exemplarisch berechnen wir die Gewinnwahrscheinlichkeit eines roten gegen einen blauen Würfel. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{4}{6}$ würfelt der rote Würfel eine 2. Gewinnen kann er nur, wenn der blaue Würfel eine 1 würfelt, was mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{6}$ passiert. Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{6}$ würfelt der rote Würfel eine 6 und gewinnt damit in jedem Fall. Eine kurze Rechnung

$$\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{6}{6} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

liefert die Gewinnwahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$. Wie häufig in der Stochastik, kann ein Baumdiagramm helfen nicht den Überblick zu verlieren. (Natürlich haben wir beim Erstellen der Tabelle Symmetrie ausgenutzt.)

- (a) Der Klassensprecher sollte den gelben Würfel nehmen und damit die Wahrscheinlichkeit für einen hausaufgabenfreien Nachmittag auf $\frac{2}{3}$ zu maximieren.
- (b) Der Klassensprecher sollte den roten Würfel nehmen und damit die Wahrscheinlichkeit für einen hausaufgabenfreien Nachmittag auf $\frac{5}{9}$ zu maximieren.

Schaut man sich die Würfel mal ein bißchen genauer an, so kann man eine interessante Entdeckung machen: Der gelbe Würfel gewinnt gegen den roten, der rote gewinnt gegen den blauen, der blaue gewinnt gegen den grünen und der grüne gewinnt gegen den gelben. (Etwas genauer müssen wir eigentlich sagen, dass der eine Würfel eine höhere Wahrscheinlichkeit hat gegen den anderen zu gewinnen, als anders herum.) Für jeden Würfel gibt es also einen anderen Würfel, der ihn (wahrscheinlich) schlägt. Das widerspricht der Intuition, dass die *Stärke* eines Würfels, also genauer die Relation „ist mit größerer Wahrscheinlichkeit größer“, transitiv sein müsse.

Die vier intransitiven Würfel aus der Aufgabenstellung heißen übrigens Efrons Würfel und sind von dem amerikanischen Statistiker Bradley Efron erfunden worden. Ähnliche Phänomene kann man bei „Schere, Stein, Papier“ oder dem „Condorcet-Paradox“, aus der Analyse von Abstimmverfahren, entdecken. Interessant ist auch die Anekdote über die Verwendung dieser Würfel durch den amerikanischen Großinvestor Warren Buffett, siehe

http://en.wikipedia.org/wiki/Nontransitive_dice.

Weiterführende Überlegungen zu solchen intransitiven Würfeln finden sich beispielsweise hier:

<http://www.remath.de/xhomepage/Efron.pdf>

Relationen, egal ob transitiv oder intransitiv, begegnen einem während eines Studiums beispielsweise in der Vorlesung „Mathematische Grundlagen für Informatiker“. Auch die Würfel selber werden beispielsweise in Übungsaufgaben der „Statistischen Methoden I“ behandelt.

Aufgabe 5:

Einen Betrag von n Cent kann man genau auf eine einzige Art und Weise mit 1-Cent Stücken bezahlen – man muss n 1-Cent Münzen verwenden. Hat man zusätzlich noch 2-Cent Münzen zur Verfügung, so kann man bis zu $\lfloor n/2 \rfloor$ (Bedeutung: n durch 2, abgerundet) 2-Cent Münzen verwenden und den Rest mit 1-Cent Münzen bezahlen. Als Anzahl der Möglichkeiten ergibt sich

$$f_1(n) = 1 \quad \text{und} \quad f_{1,2}(n) = \lfloor n/2 \rfloor + 1.$$

Betrachten wir nun 5- und 10-Cent Münzen. Da beide Werte durch 5 teilbar sind, kann man damit nur Vielfache von 5-Cent Beträgen exakt bezahlen. Division durch 5 führt das Problem der Anzahl der Möglichkeiten in den übrigen Fällen auf das vorherige mit 1- und 2-Cent Münzen zurück. Als Anzahl der Möglichkeiten ergibt sich also

$$f_{5,10}(n) = \begin{cases} \lfloor n/10 \rfloor + 1 & : \quad 5 \text{ teilt } n, \\ 0 & : \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Anzahl der Möglichkeiten einen 99-Cent Artikel mit 1-, 2-, 5- oder 10-Cent Münzen zu bezahlen, setzt sich aus beiden betrachteten Teilproblemen zusammen, so dass sich

$f_{5,10}(0) \cdot f_{1,2}(99) + f_{5,10}(5) \cdot f_{1,2}(94) + f_{5,10}(10) \cdot f_{1,2}(89) + \dots + f_{5,10}(95) \cdot f_{1,2}(4) = 2090$ Möglichkeiten ergeben.

Mit ein paar Formeln kann man sich auch das Ausrechnen dieser Summe von Produkten ein wenig erleichtern. Unter Verwendung des Summenzeichens können wir auch

$$\sum_{i=0}^9 f_{5,10}(10i) \cdot f_{1,2}(99 - 10i) + f_{5,10}(10i + 5) \cdot f_{1,2}(99 - 10i - 5)$$

für die Anzahl der Möglichkeiten einen 99-Cent Artikel mit 1-, 2-, 5- oder 10-Cent Münzen zu bezahlen schreiben. Mit Hilfe der Formeln für $f_{1,2}(n)$ und $f_{5,10}(n)$ vereinfachen wir dies zu

$$\sum_{i=0}^9 (i+1) \cdot (50 - 5i) + (i+1) \cdot (48 - 5i) = \sum_{i=0}^9 98 + 88i - 10i^2.$$

Verwenden wir nun die Summationsformeln

$$\sum_{i=0}^n 1 = (n+1), \quad \sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

so ergibt sich ebenfalls

$$10 \cdot 98 + 88 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} - 10 \cdot \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} = 2090.$$

Lässt man sich auf eine etwas gewöhnungsbedürftige mathematische Darstellung ein, kann man solche Münzbezahlprobleme auch ganz allgemein durch Polynommultiplikation behandeln. Mit $f_{a_1, \dots, a_r}(n)$ wollen wir die Anzahl der Möglichkeiten bezeichnen, einen Betrag n mit Münzen der Werte $a_1, \dots, a_r$ zu bezahlen. Vorher hatten wir bereits Beispiele für $f_1(n)$, $f_{1,2}(n)$ und $f_{5,10}(n)$ gesehen. Jeder solchen Funktion wollen wir nun ein Polynom (oder genauer eine Potenzreihe) zuordnen:

$$g_{a_1, \dots, a_r}(x) = f_{a_1, \dots, a_r}(0) \cdot x^0 + f_{a_1, \dots, a_r}(1) \cdot x^1 + f_{a_1, \dots, a_r}(2) \cdot x^2 + f_{a_1, \dots, a_r}(3) \cdot x^3 + \dots$$

Die Funktionswerte übernehmen also die Rolle der Koeffizienten des Polynoms. Das Schöne an dieser Darstellung ist, dass das Zusammensetzen von disjunkten Münzmengen der Polynommultiplikation entspricht, also etwa

$$g_{1,2,5,10}(x) = g_{1,2}(x) \cdot g_{5,10}(x).$$

(In obiger Lösung haben wir den Koeffizienten von x^{99} in $g_{1,2,5,10}(x)$ berechnet.)

Für nur eine Münze mit (ganzzahligem) Wert a haben wir

$$g_a(x) = 1 + x^a + x^{2a} + x^{3a} + \dots$$

Berechnen wir damit beispielhaft $g_{1,2}(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) \cdot (1 + x^2 + x^4 + \dots) = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \dots$$

Wenn wir nun noch die unendliche geometrische Reihe verwenden erhalten wir

$$g_a(x) = \frac{1}{1 - x^a},$$

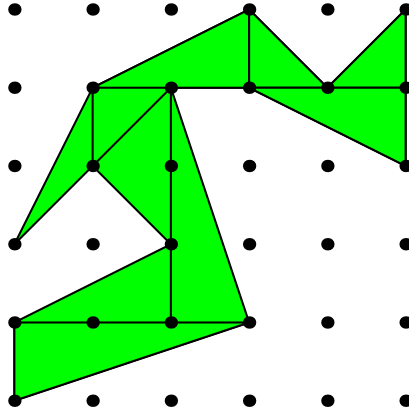
woraus wir sofort die allgemeine *Formel*

$$g_{a_1, \dots, a_r}(x) = \prod_{i=1}^r \frac{1}{1 - x^{a_i}} = \frac{1}{1 - x^{a_1}} \cdot \frac{1}{1 - x^{a_2}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1 - x^{a_r}}$$

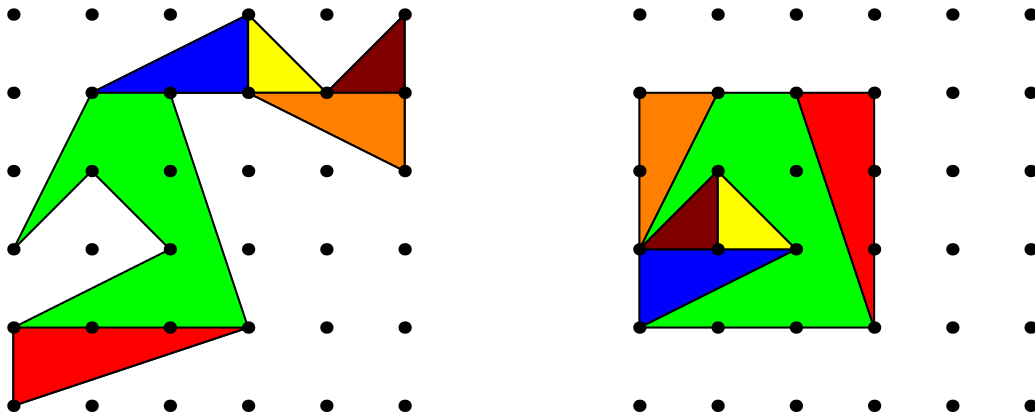
erhalten. Solche Funktionen heißen übrigens erzeugende Funktionen und kommen in der Algebraischen Kombinatorik vor. Mit Hilfe der sogenannten Taylorentwicklung (die man entweder in der Oberstufe oder in der „Analysis“ kennenlernt) kann man dann z.B. die Koeffizienten einer solchen Potenzreihe berechnen.

Aufgabe 5:

Eine Möglichkeit ist es die Weide in Dreiecke zu zerlegen, man sagt auch triangulieren. Nun kann man von jedem Teildreieck mit Hilfe der Formel „Grundfläche mal Höhe geteilt durch Zwei“ den Flächeninhalt berechnen.



Bei unserem Beispiel ist es möglich das Polygon geschickt zu zerschneiden und zu einem Quadrat zusammen zu setzen.



Bei beiden Varianten kommt man auf einen Flächeninhalt von 900 Quadratmetern.

Kennt man den Satz von Pick, so kann man auch einfach die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand, hier $R = 14$, und die inneren Gitterpunkte, hier $I = 3$, zählen. Der Flächeninhalt beträgt dann $\frac{R}{2} + I - 1$ mal dem Flächeninhalt eines Gitterpunkteinheitsquadrates, also hier $14/2 + 3 - 1 = 9$ mal 100 Quadratmeter.